b- Pour tout x de $[0;+\infty[$,

$F'(x) = (2x)'\psi'(2x) - \psi'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Ainsi $\star\forall x > 0; F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$$= \frac{2}{h(2x)} - \frac{1}{h(x)} \qquad \text{car } f(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$= \frac{2h(x) - h(2x)}{h(2x)h(x)} = \frac{2x - 2Logx - 2x + Log2x}{h(2x)h(x)}$$

$$= \frac{Log2 - Logx}{h(2x)h(x)}.$$

• $F'(0) = 2f(2\times 0) - f(0) = f(0) = 0$.

2/ Pour tout x de $]0;+\infty[$, $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = [Logt]_x^{2x} = Log2x - Logx$

$$= Log\left[\frac{2x}{x}\right] = Log2.$$

3/ Pour tout x de $[1;+\infty[$, $F(x) - Log2 = \int_x^{2x} f(t)dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$

$$= \int_x^{2x}\left(f(t) - \frac{1}{t}\right)dt = \int_x^{2x} \frac{Logt}{t(t - Logt)}dt.$$

• $\forall x \geq 1$ on a : $1 \leq x \leq 2x$ et

$\star\ \forall t \in [x,2x]; \frac{Logt}{t(t - Logt)} \geq 0$

$\Rightarrow F(x) - Log2 = \int_x^{2x} \frac{Logt}{t(t - Logt)}dt \geq 0.$

$\star\ \forall t \in [x,2x]; h(x) \leq h(t)$ (car h est croissante sur $[1;+\infty[$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(x)}$

aussi $\forall t \in [x,2x]; Logt \leq Log2x$

d'où $\frac{Logt}{h(t)} \leq \frac{Log2x}{h(x)}$

par suite $\frac{Logt}{th(t)} \leq \frac{Log2x}{h(x)} \times \frac{1}{t}$

ce qui donne $\int_x^{2x} \frac{Logt}{t(t - Logt)}dt \leq \int_x^{2x} \frac{Log2x}{h(x)} \times \frac{1}{t}dt$

$\Leftrightarrow F(x) - Log2 \leq \frac{Log2x}{h(x)} \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$

$\Leftrightarrow F(x) - Log2 \leq \frac{Log2x}{h(x)} Log2 \leq \frac{Log2x}{h(x)} \times 1$ car $Log2 \leq 1$

d'où $F(x) - Log2 \leq \frac{Log2x}{h(x)}$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$ on a : $0 \leq F(x) - Log2 \leq \frac{Log2x}{h(x)}$.